

## ОБОБЩЕН НАУЧЕН ОТЧЕТ

НА ДОГОВОР КП-06-Н28/6 от 08.12.2018 г.

**Тема: „Алгебрични Методи в Квантовата Статистика и Приложения в Квантови Системи“**

През периода на договора са публикувани или предстоят да бъдат публикувани общо 28 научни труда, 1 популярна статия, 1 статия In Memoriam и предговор на книжка от брой на Bulg. J. Phys. със статиите от международния семинар SDANCA-19, на участниците в Договор КП-06-Н28/6 с Националния Фонд "Научни изследвания" съгласно работната програма.

Научните трудове се разпределят както следва:

- 16 публикации в международни издания с импакт фактор;
- 5 публикации в международни издания с импакт ранг;
- 6 в други издания
- 1 електронен препринт на интернет-сайт <https://arXiv.org>, предстоящ за публикуване.

Отчетът е построен последователно по секции, всяка съответстваща на един от 2-та работни пакета.

**Работен пакет 1 „Аспекти на проекта, свързани със симетрии: (супер)алгебри на Ли,  $Z_2 \times Z_2$ -градуирани алгебри, квантови групи. Теория на представянията.“**

**I.1.Планирани дейности от работните програми за първия и втория етап.**

- **Изследователски дейности:**

**Дейност 1.1 (първи етап):** Построяване в явен вид на клас от унитарни неприводими представяния на супералгебрата на Ли  $V(\infty|\infty)$ .

**Дейност 1.2 (втори етап):** Развитие на теорията на  $Z_2 \times Z_2$ -градуираните аналози на базисните класически супералгебри на Ли - подалгебрична структура, разлагането им по корневи пространства, представяния. Теория на базисните класически супералгебри на Ли и алгебри на симетрии.

**Дейност 1.3 (първи етап):** Изследване на алгебричната структура и груповите трансформации на мета-конформната алгебра  $mconf(1,d)$ , за  $d > 2$ . Конструкция на тензора на енергията и импулса за мета-конформните симетрии за  $d=1$  and  $d=2$ .

**Дейност 1.4 (втори етап):** Построяване на динамична мета-конформна теория на полето за  $d = 1,2$ . Приложения. Изследване на представянията на спин-1 конформната алгебра на Галилей и техния потенциал за приложение към неравновесни статистически модели с динамична експонента  $z \neq 2$ .

- Подготовка и писане на научни статии за публикуване (основно в международни списания);
- Подготовка на презентации с цел представяне на резултатите на семинари и международни конференции;
- Участие в конференции и семинари.

## **I.2. Осъществени дейности през двата етапа.**

- Осъществени са всички научни изследвания планирани в проектното предложение (описани са в т. I.4.1 по-долу).
- Подготвени, изпратени и публикувани са статии с резултати от осъществените изследвания (списък – в т. I.4.2 по-долу).
- Участие в конференции/семинари:

XIII International Workshop Lie Theory and Its Applications in Physics, (Varna, Bulgaria, 17-23 June 2019) - J. Van der Jeugt, H. Стоилова, С. Стоименов, R. Oste

<http://theo2.inrne.bas.bg/~dobrev/LT-13.htm>

Изнесени доклади: **J. Van der Jeugt** - Class of representations of the infinite-rank Lie superalgebra  $B(\infty/\infty)$  (пленарен); **С. Стоименов** - Applications of meta-conformal invariance to directed spin systems; **R. Oste** - Some realizations of Lie superalgebras and centralizer projections

XI International Symposium Quantum Theory and Symmetries, (Montréal, Canada, 1-5 July, 2019) – **Н. Стоилова**

[http://www.crm.umontreal.ca/2019/QTS2019/index\\_e.php](http://www.crm.umontreal.ca/2019/QTS2019/index_e.php)

Доклад: Explicit representations of the Lie superalgebra  $\mathfrak{B}(\infty|\infty)$

<http://www.crm.umontreal.ca/2019/QTS2019/pdf/stoilova.pdf>

Семинар: **R. Oste**, A Howe duality deformation using reflection groups, 6 февруари 2020 г., 13:15 ч., зала 300 на ИЯИЯЕ,

<https://www.inrne.bas.bg/index.php/seminars/775-news-seminar-06-02-2020>

XIV International Workshop Lie Theory and Its Applications in Physics, (Sofia (on-line), 20-26 June 2021) - Н. Стоилова, С. Стоименов  
<http://theo.inrne.bas.bg/~dobrev/LT-14.htm>

Изнесени доклади: **С. Стоименов** - Regime of meta-conformal invariance in spherical model;

The 34th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, (Jul 18 – 22, 2022 Strasbourg, France) – **Н. Стоилова**

<https://indico.in2p3.fr/event/23498/>

Доклади: A class of representations of the infinite-rank  $Z_2 \times Z_2$ -graded Lie superalgebra  $psl(\infty|\infty)$ : <https://indico.in2p3.fr/event/23498/page/3058-booklets-and-program>

Tchavdar Palev - In Memoriam: <https://indico.in2p3.fr/event/23498/page/2711-plenary-speakers>

### **I.3. Очаквани резултати (от проектното предложение).**

Публикации в международни списания с импакт фактор и в материали на конференции.

### **I.4. Постигнати резултати през отчитания етап.**

#### **I.4.1 Описание на постигнатите научни резултати**

Дейности 1.1: Една от алгебричните структури, която се генерира от операторите на раждане и унищожение на  $m$  парафермиона и  $n$  парабозона, е супералгебрата на Ли  $B(m|n) \equiv osp(2m+1|2n)$ . Като резултат пространствата на състоянията на система от парачастици (Фоковите пространства) са безкрайномерни унитарни неприводими представяния на  $B(m|n)$ . Случаят на безброй много парабозони и парафермиони води до безкрайномерната алгебра  $B(\infty|\infty)$ . Преходът обаче от краен ранг алгебри към безкраен ранг води до множество усложнения. За построяване на физически важния клас от представяния на  $B(\infty|\infty)$  като първа стъпка в [РП1.1] беше въведена нова матрична форма на ортосимплектичната супералгебра на Ли  $B(n|n)$  (добре известната се оказва, че не е подходяща за обобщение в безкрайномерния случай). В тази нова реализация на  $B(n|n)$  идентифицирахме операторите, съответстващи на парачастиците, които показахме, че генерират базис за  $B(n|n)$ . В клас  $B(n|n)$  модули, въведохме нов базис на Гелфанд-Цетлин и пресметнахме трансформацията му под действие на парастатистическите оператори. Матричните елементи на параоператорите са произведение от  $gl(n|n)$  коефициенти на Клебш-Гордан, които бяха пресметнати, и редуцирани матрични елементи. Сигнатурите в таблиците, с които се задават базисните вектори на Гелфанд-Цетлин имат интересни комбинаторни свойства, именно свойства на стабилност, които се запазват под действие на генераторите на алгебрата. Тези свойства на стабилност позволяват да се дефинират таблиците на Гелфанд-Цетлин за случая, когато  $n$  стане безкрайност. Супералгебрата на Ли от безкраен ранг  $B(\infty|\infty)$  в матричен вид се състои от определени безкрайни квадратни матрици с крайно число ненулеви елементи. Базисът в съответните  $B(\infty|\infty)$  модули се дава

с безкрайни, но стабилни по редовете таблици на Гелфанд-Цетлин. Доказателството на неприводимостта на построените представяния следва идеята, че стабилността по отношение на редовете в таблиците на Гелфанд-Цетлин позволява да се продължат действията на генераторите на алгебра от краен ранг до случая когато  $n$  става безкрайност.

Втора алгебрична структура, която се генерира от операторите на раждане и унищожение на  $m$  парафермиона и  $n$  парабозона, е  $Z_2 \times Z_2$  аналогът на супералгебрата на Ли  $B(m|n) \equiv osp(2m + 1|2n)$ . Поради тази причина е нужно да се дефинира и изследва нейна подалгебра, а именно  $Z_2 \times Z_2$ -градуираната обща линейна супералгебра на Ли. Това е направено в работа [РП1.2], като последната е дефинирана в алгебричното продължение на универсалната обвиваща алгебра на общата линейна супералгебра на Ли, както и са намерени матричните елементи на аналога на важните за приложения ковариантни тензорни представяния в  $Z_2 \times Z_2$ -градуирания случай.

В работа [РП1.3] се изучава алгебрата на симетрии за оператора на Дирак-Дункел, съответстваща на изключителната корнева система  $G_2$ . За крайна група на отражения, действаща върху крайномерно векторно пространство съществува алгебра на Чередник, която може да се разглежда като деформация на алгебрата на полиномеални диференциални оператори върху векторното пространство. Явна реализация се дава чрез оператори, които се наричат оператори на Дункел. Обобщението на оператора на Дирак се дефинира абстрактно в тензорното произведение на алгебрата на Чередник и на Клифорд или директно чрез използване на частни производни в дефиницията на оператора на Дирак. Операторът на Дирак-Дункел заедно с неговия дуален партньор генерират супералгебрата на Ли  $osp(1|2)$ . Дадени са и резултати за произволна корнева система в 3-мерно пространство и е показано, че това води до съществуване на стълбични оператори за алгебрата на симетрии съответстваща на  $G_2$ .

Дейност 1.2: Цветните алгебри и супералгебри са обобщения на алгебрите и супералгебрите на Ли. За такива структури, алгебрата е градуирана чрез Абелева група  $\Gamma$ . Най-простият случай, който не е (супер)алгебра на Ли е с  $\Gamma = Z_2 \times Z_2$ . За алгебра градуирана чрез  $Z_2 \times Z_2$  има два възможни избора за скобката на Ли, като съответните нови алгебрични структури не са нито алгебри на Ли, нито супералгебри на Ли. В сравнение с централната роля на алгебрите и супералгебрите на Ли,  $Z_2 \times Z_2$ -градуираните алгебри дълги години не са намерили приложения в теоретичната и математична физика. През последните години обаче се наблюдава нарастващ интерес към тези структури. Те се появиха като симетрии в уравненията на Левли-Леблон (L'evy–Leblond), в градуирана (квантова) механика и квантувания, в  $Z_2 \times Z_2$ -градуирани двумерни модели, както и в обобщената квантова статистика – парастатистиката, в описанието на парабозони и парафермиони. Аналозите на базисните класически (супер)алгебри на Ли дори не бяха дефинирани. В работа [РП1.4] са изследвани начините, по които класическите алгебри на Ли могат да бъдат обобщени до  $Z_2 \times Z_2$ -градуирани алгебри.  $Z_2 \times Z_2$ -градуираните алгебри  $g$  са пряка сума на 4 подпространства:  $g = g_{(0,0)} \oplus g_{(0,1)} \oplus g_{(1,0)} \oplus g_{(1,1)}$ . Стартирайки с множество от пораждаци

на класическа алгебра на Ли (в дефиниционната матрична форма), съпоставяйки  $Z_2 \times Z_2$ -градуировка на тези пораждащи и пресмятайки нови елементи с пораждащите, като се прилага дефиницията на  $Z_2 \times Z_2$ -градуирана алгебра, видяхме какви матрични структури и алгебри възникват. При систематичното следване на тази процедура предположихме, че пораждащото подпространство на дадена класическа алгебра на Ли  $G$  съответства на подпространството  $\mathfrak{g}_{(0,1)} \oplus \mathfrak{g}_{(1,0)}$  на обобщената  $Z_2 \times Z_2$ -градуирана алгебра  $\mathfrak{g}$  и че  $\mathfrak{g}$  е породена от това подпространство съгласно:  $\mathfrak{g}_{(0,0)} = [[\mathfrak{g}_{(0,1)}, \mathfrak{g}_{(0,1)}]] + [[\mathfrak{g}_{(1,0)}, \mathfrak{g}_{(1,0)}]]$  и  $\mathfrak{g}_{(1,1)} = [[\mathfrak{g}_{(0,1)}, \mathfrak{g}_{(1,0)}]]$ , където  $[[\mathfrak{g}_{(a,b)}, \mathfrak{g}_{(c,d)}]]$  е обобщената скобка на Ли. Следователно трябваше да се разгледат пораждащите подпространства  $A$  на всяка от класическите алгебри на Ли  $G$  такива, че  $G = A + [A, A]$ . Тези пораждащи подпространства бяха намерени от нас по-рано и те съответстват на т.н. 5-градуировки  $G = G_{-2} \oplus G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1 \oplus G_2$  на  $G$  и  $A = G_{-1} \oplus G_1$ . Имайки предвид това, започвайки с дадена класическа алгебра на Ли  $G$  в нейното дефиниционно матрично представяне за всяка от 5-градуировките на  $G$ ,  $A = G_{-1} \oplus G_1$  се разбива по всички възможни начини на 2 подпространства  $\mathfrak{g}_{(0,1)} \oplus \mathfrak{g}_{(1,0)}$ , след което се построяват матричните елементи на съответната  $Z_2 \times Z_2$ -градуирана алгебра  $\mathfrak{g}$ . По този начин са получени  $Z_2 \times Z_2$ -градуираните алгебри аналози на класическите алгебри на Ли в матричен вид. В допълнение в работата са разгледани потенциални приложения, а именно описание на парафермионната статистика и  $A$  статистиката.

В работа [РП1.5] е показано, че изключителната алгебра на Ли  $G_2$  може да бъде описана като свободна алгебра на Ли с 3 пораждащи  $x_1, x_2, x_3$ , които удовлетворяват следните прости четворни релации:

$$[x_i, [x_j, [x_i, x_k]]] = 2\varepsilon_{ijk}x_i; \quad [x_i, [x_j, [x_j, x_k]]] = 6\varepsilon_{ijk}x_j,$$
 където  $\varepsilon_{ijk}$  е символът на Леви-Чивита (Levi-Civita) в тримерие.

Дейности 1.3: В работа [РП1.6] са конструирани представянията, груповите трансформации, ковариантните двуточкови функции и е изследвана алгебричната структура на мета-конформната алгебра  $meta(1, d)$  за  $d = 1, 2, 3$ . И докато за  $d = 1, 2$  представянията на мета-конформната алгебра са *безкрайномерни*, то за  $d = 3 (d > 2)$  съществуват само крайномерни представяния. Различна е и алгебричната структура на мета-конформната алгебра  $meta(1, d)$ :

- a) пряка сума е на две алгебри на Вирасоро за  $d = 1$ . В този случай мета-конформната алгебра е изоморфна на стандартната конформна алгебра  $conf(d + 1) = conf(2)$ ;
- b) пряка сума е на три алгебри на Вирасоро за  $d = 2$ . Тук съответната конформна алгебра  $conf(d + 1) = conf(3)$  дори *не е безкрайномерна*.
- c) пряка сума е на  $sl(2, \mathcal{R})$  и стандартната (орто)конформна алгебра  $conf(d)$  за  $d > 2$ , като има логичен преход между двата типа структури и представяния. Например

за  $d = 2$  стандартната конформна алгебра има максимална крайномерна подалгебра - пряка сума на две  $sl(2, \mathcal{R})$  алгебри и съответно максималната крайномерна подалгебра на мета-конформната алгебра е пряка сума на три  $sl(2, \mathcal{R})$  алгебри, които в безкрайномерния случай преминават в алгебри на Вирасоро.

Конструирането на тензора на енергията и импулса на мета-конформните трансформации за  $d = 1,2$  предполага създаване на мета-конформна теория на полето, в основата на която са определянето на тези трансформации на полетата, които запазват ковариантната многоточкова функция. За разлика от стандартната конформна теория на полето (за която ковариантната многоточковата функция е добре дефинирана в целия диапазон пространство-време и има коректни физични граници, като регулярност в нулата и да клони към нула при безкрайна отдалеченост на точките в пространството и времето) дори двуточковата мета-конформно ковариантна функция, изведена чрез тъждествата на Уорд (определени от експлицитния вид на генераторите) се оказва със сингулярности в определени точки и с възможност за експлозия в други (работа [РП1.6]). За това, на първо време е необходима, чисто алгебрична процедура за отсяване на физичната форма на мета-конформната ковариантна функция, т.е. регулярна и ограничена в целия пространство-времеви диапазон. Такава процедура е предложена в работа [РП1.7] и представлява пресмятане на ковариантната функция първо в дуалното пространство (получено чрез Фурие трансформация на генераторите и полетата). Ако тя има определени свойства (да е функция от пространството на Харди, виж допълнението на статия [РП1.7]), то последваща трансформация в директното пространство гарантира нейната ограниченост и регулярност. Подобна процедура е прилагана за алгебри, които не са полупрости, като алгебрата на Шрьодингер и конформната алгебра на Галилей, като тук за първи път се прилага за полупрости алгебри, каквато е мета-конформната. Разликата е, че докато в предишните случаи принадлежността на дуалната ковариантна функция към пространството на Харди лесно се доказва, в мета-конформния случай тя е твърде обща и такива свойства трябва да се постулират. В резултат на тази процедура се случва и нещо друго от концептуално значение. Получената ковариантна функция, регулярна и ограничена се оказва неаналитична функция на променливите си.

Дейност 1.4: Комбинацията между динамичните симетрии на уравнението на дифузия и уравнението на балистичния транспорт води до нов клас от симетрии, включващи анизотропни мащабни трансформации т.е. в различните пространствени направления асоциираната динамична експонента има различни стойности (работи [РП1.8, РП1.9]). Ограничавайки се до едно „паралелно“ (на някакъв линеен процес) -  $x$  направление и едно „перпендикулярно“ -  $u$  направление е конструирана безкрайномерната мета-Шрьодингер-Вирасоро алгебра на Ли  $\mathbf{msv}(1,1)$ , която е нетривиално разширение на анизотропните мащабни трансформации. Тя има следната структура:  $\mathbf{msv}(1,1) = (\{\mathbf{vir}\} \oplus \{\mathbf{vir}\}) \times \{\mathbf{gal}\}(1) = \{\mathbf{vir}\} \oplus \{\mathbf{sv}\}(1)$ . Нейната максимална крайномерна подалгебра е мета-Шрьодингер алгебрата -  $\mathbf{metasch}(1,1)$ . Тази конструкция е обобщена до представянния на  $\mathbf{msv}(1,1)$ , които описват

нестационарни динамични симетрии, но не включват инвариантността спрямо трансляции във времето. Генераторът на трансляции във времето е модифициран, като е включен нов параметър  $\xi$ , характеризиращ нестационарните мащабни полета. Представянията на  $\mathbf{msv}(1,1)$  с  $\xi \neq 0$  обаче, се ограничават до представяния на крайномерната подалгебра  $\mathbf{metasch}(1,1)$ , когато са симетрии на уравнение от типа на Шрьодингер  $\hat{S}\varphi(t, x, y) = 0$ , с модифициран оператор на Шрьодингер (работа [РП1.8]), не инвариантен спрямо трансляции във времето. Инвариантността се възстановява при полагането  $\xi = 0$ . Доказана е еквивалентността на представянията с  $\xi \neq 0$  и  $\xi = 0$  и следователно само конкретните физични примери биха определили избора на конкретно представяне, например чрез желаната форма на оператора на Шрьодингер.

Конструиранията представяния на мета-Шрьодингеровата алгебра  $\mathbf{metasch}(1,1)$  позволяват получаването на квазипървичните, ковариантни двуточкови функции. Те са решение на система от диференциални уравнения, следващи от тъждествата на Уорд и се пишат в термини на естествените „координати на светлинния конус“:  $\tau = t, v = t + \beta x, y = y$  (случай **А**) или  $\rho = t + cx, \sigma = t + (\beta - c)x, y = y$  (случай **Б**) (тук зависимостта е от разликите на времевите и пространствените координати в двете точки, например  $t = t_1 - t_2$ ). Сравнявайки вида на стационарните, ковариантни двуточкови функции (за двата случая **А** или **Б**) се вижда тяхната идентичност след подходяща идентификация на експонентите.

В нестационарния случай, главната промяна е зависимостта на ковариантните двуточкови функции от точно определена функция на нова мащабна променлива  $u$ , представляваща съотношението на две времена. И докато, това е единствената промяна за по-простия случай **А**, в по-komplицирания случай **Б** се появява допълнителна зависимост от разликата на двете времена.

В работа [РП1.10] са изследвани конкретни физични реализации на горните симетрии в неравновесните процеси на физическо стареене на спиновите системи, включващи процеси на балистичен и на дифузен транспорт. Идеята е да покажем съществуването на *нов режим на динамичен скейлинг* (това е инвариантност спрямо динамични мащабни трансформации) с динамична експонента  $z = 1$  в едно привилегировано направление и  $z = 2$  в другите перпендикулярни направления в динамиката на релаксация на спиновите модели с насочен „байас“ във взаимодействието (под „байас“ тук се разбира, че във взаимодействието между съответните спиновите променливи има член, който действа само в едно направление).

За да се разберат по-добре условията, при които един такъв нов режим на „анизотропен“ скейлинг може да бъде установен е разгледан сферичният модел като нетривиален пример. Сферичният модел се характеризира с динамична експонента  $z = 2$ , както за неравновесната релаксационна динамика при  $T < T_c$ , така и за критичната динамика при  $T = T_c$ . Тук алгебрата на динамични симетрии е алгебрата на Шрьодингер, т.е. инвариантността на Шрьодингер се реализира в режим на динамичен скейлинг, когато  $t \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  и  $\mathbf{r}^2/t$  е фиксирано ( $\mathbf{r}$  е вектор).

При наличието на насочен „байас“ една от двете алгебри на Ли: мета-конформната алгебра или мета-Шрьодингеровата са кандидати за алгебра на динамични симетрии, които съответно могат да бъдат реализирани в един от следните режими на динамичен скейлинг ( $\mathbf{r}=(x,y)$ , а  $\mathbf{q}=(q,p)$  е вектор в пространството на Фурие, в което се работи в работа [РП1.10]):

- Изотропен скейлинг: при  $t \rightarrow \infty$ ,  $q \rightarrow 0, p \rightarrow 0$  следва, че  $t \cdot q = const$  и  $t \cdot p = const$ , т.е. са фиксирани (в директното пространство при  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$  следва, че  $x/t = const$  и  $y/t = const$ ).
- Анизотропен скейлинг: при  $t \rightarrow \infty$ ,  $q \rightarrow 0, p \rightarrow 0$  следва, че  $t \cdot q = const$  и  $t \cdot p^2 = const$ , т.е. са фиксирани (в директното пространство при  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$  следва, че  $x/t = const$  и  $y^2/t = const$ ).

Оказва се, че необходимо условие за мета-конформна или мета-Шрьодингерова инвариантност е наличието на начален корелатор с действие на дълго разстояние (работа [РП2.10]). При това:

-мета-Шрьодингерова инвариантност се реализира при силно анизотропен скейлинг при  $T < T_c$ . Тя позволява извода на линейната функция на отклик. Оказва се, че последната е идентична с функцията на отклик на насочения сферичен модел, получена чрез директно пресмятане (сферичния модел е точно решим) при подходящ избор на мащабните размерности  $\delta_i, \xi_i, \tilde{\delta}_i, \tilde{\xi}_i$  на квазипървичните мащабни оператори (интерпретирани като параметри на порядък)  $\Phi_i$  и техните спрегнати  $\tilde{\phi}_i$ , които според формализма на Janssen-de Dominicis се характеризират с негативна маса.

-мета-конформна инвариантност възниква при изотропен скейлинг. Тя позволява извод на двучковата корелационна функция на квазипървичните мащабни оператори  $\phi_i$ . Подобна симетрия се наблюдава при  $T < T_c(d)$  (критичната температура зависи от размерността  $d$ ) за начален корелатор с действие, както на дълго, така и на късо разстояние. При  $T = T_c(d)$  мета-коформната инвариантност се наблюдава само при начален корелатор с действие на дълго разстояние и то при определени параметри.

#### I.4.2 Списък на публикации по РП 1 с отбелязана подкрепа от договор КП-06-Н28/6

[РП1.1] N.I. Stoilova and **J. Van der Jeugt**, A class of representations of the orthosymplectic Lie superalgebras  $B(n,n)$  and  $B(\infty,\infty)$ , In: Dobrev V. (eds) Lie Theory and Its Applications in Physics. LT 2019. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 335, pp. 185-201 (2020) Springer, Singapore, **SJR: 0.217**. [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-15-7775-8\\_12](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-15-7775-8_12)

[РП1.2] Phillip S. Issac, **N.I. Stoilova** and Joris Van der Jeugt, The  $Z_2 \times Z_2$ -graded general linear Lie superalgebra, J. Math. Phys. 61 011702 (2020) **IF:1.355, Q2** (Scopus), <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.5138597>



- [PII.3] Alexis Langlois-Rémillard and **Roy Oste**, An exceptional symmetry algebra for the 3D Dirac–Dunkl operator, In: Dobrev V. (eds) Lie Theory and Its Applications in Physics. LT 2019. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 335, pp. 399–405 (2020), Springer, Singapore, **SJR: 0.217**, [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-15-7775-8\\_30](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-15-7775-8_30)
- [PII.4] **N.I. Stoilova and J. Van der Jeugt**, On classical  $Z_2 \times Z_2$ -graded Lie algebras, J. Math. Phys. 64 061702 (2023), **IF 1.469** , **Q2** (Scopus) <https://doi.org/10.1063/5.0149175>
- [PII.5] **N.I. Stoilova and J. Van der Jeugt**, The exceptional Lie algebra  $g_2$  is generated by three generators subject to quadruple relations, arXiv:2212.04131 [math.RA], <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.04131> and J. Lie Theory, Volume **33** (2023) Heldermann Verlag (приета за публикуване), ISSN 0949–5932, **IF 0.376**, **Q3** (Scopus)
- [PII.6] M. Henkel and **S. Stoimenov**, Infinite-dimensional meta-conformal Lie algebras in one and two spatial dimensions, J. Sat. Mech.: Theory and Experiment, 8, 084009 (2019), **IF 2.371**, **Q1** (Web of Science, Math. Phys.) <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-5468/ab3282>
- [PII.7] Malte Henkel, Michal Dariusz Kuczynski and **Stoimen Stoimenov**, “Boundedness of meta-conformal two-point functions in one and two spatial dimensions”, J. Phys. A: Math. Theor. 53 475001 (2020), **IF 2.132**, **Q2** (Web of Science), <https://doi.org/10.1088/1751-8121/abb9ef>
- [PII.8] **Stoimen Stoimenov**, Malte Henkel, Meta-Schrodinger invariance, Nuclear Physics B, 985, Elsevier, 2022, ISSN:0550-3213, **IF 3.045** (**Web of Science**) **Q1** (Scopus), <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2022.116020>
- [PII.9] **Stoimen Stoimenov**, Malte Henkel, Meta-Schrödinger transformations, (2022) In: Dobrev, V. (eds) Lie Theory and Its Applications in Physics. LT 2021. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 396. pp 411–421, ISSN 21941009, 21941017, Springer, Singapore, **SJR: 0.2** [https://doi.org/10.1007/978-981-19-4751-3\\_37](https://doi.org/10.1007/978-981-19-4751-3_37)
- [PII.10] Malte Henkel, **Stoimen Stoimenov**, Dynamical symmetries in the non-equilibrium dynamics of the directed spherical model, arXiv: 2305.18155v1[cond-math.stat-mech] (2023), <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.18155>

## Работен пакет 2 „Обобщени квантови статистики. Квантови системи.“

### II.1. Планирани дейности от работните програми за първия и втория етап.

- Изследователски дейности:

**Дейност 2.1** (първи етап): „Построяване пространствата на Фок на смесени системи от безкраен брой парабозони и безкраен брой парафермиони с относителни парафермионни комутационни съотношения.“

**Дейност 2.2** (втори етап): „Построяване пространствата на състоянията (Фок) на смесени системи от безкраен брой парабозони и безкраен брой парафермиони с относителни парабозонни комутационни съотношения и на други обобщени квантови системи.“

**Дейност 2.3** (първи етап): „Приложение на заместващата  $SU(3)$  алгебрична схема към ядрени деформации и спектрални свойства – систематично описание и предсказване на деформации и ядрени свойства в тежки, свръхтежки и богати на неутрони ядра; описание и предсказване на явления, свързани с едновременно съществуващи форми.“;

**Дейност 2.4** (втори етап): „Приложение на схеми с  $SU(3)$  симетрия и модели с ядрена деформация – описание на спектри и вероятности за преходи в ядра от различни масови области; изследване на ядрени деформации и свързани с тях динамични ефекти.“

- Подготовка и писане на научни статии за публикуване (основно в международни списания);
- Подготовка на презентации с цел представяне на резултатите на семинари и международни конференции;
- Участие в конференции и семинари;
- Организиране на посещения на видни учени от чужбина – водещи експерти по темите на проекта;
- Организиране и провеждане на международно работно съвещание "Форми и динамика на атомните ядра: съвременни аспекти" – София, октомври 2019 г. и септември 2021 г. с председател на Организационния комитет **Н. Минков**.

### II.2. Осъществени дейности през двата етапа.

- Осъществени са всички научни изследвания планирани в проектното предложение (описани са в т. II.4.1. по-долу).
- Подготвени, изпратени и публикувани са статии с резултати от осъществените изследвания (списък – в т. II.4.2 по-долу).

- Участие в семинари/конференции:

5-ти семинар на гръцкия институт по ядрена физика HINPW5, проведен на 12-13 април 2019 г., в гр. Солун, Гърция. Изнесен поканен доклад: **Н. Минков** “Theoretical predictions for the decay rates and magnetic moment in  $^{229\text{m}}\text{Th}$ ”, <http://hinpw5.physics.auth.gr/>

38-ми международен семинар по теория на атомното ядро, 23-29 юни 2019 г., Боровец, Рила. Изнесен доклад: **Н. Минков** “Study of pear-shape effects in the spectra of even-even nuclei”, <http://ntl.inrne.bas.bg/workshop/2019/programme.html>

26-ти семинар по ядрена физика „Key problems in nuclear physics”, 24-29-ти септември 2019 г., гр. Казимирш Долни, Полша. Изнесен поканен доклад: **Н. Минков** “Evaluation of pear-shape effects in even-even nuclei”, <http://slcj.uw.edu.pl/en/blog/2019/12/05/xxvi-nuclear-physics-workshop-2019/>

Международния научен семинар: „Форми и динамика на атомните ядра: съвременни аспекти“ (“Shapes and Dynamics of Atomic Nuclei: Contemporary Aspects” (SDANCA-19)), 3-5-ти октомври 2019 г., София. Изнесен доклад: **Н. Минков** “Nuclear structure effects involving pear-shape deformation”, [http://ntl.inrne.bas.bg/events/sdanca19/abstracts/SDANCA19\\_abstract\\_Minkov.pdf](http://ntl.inrne.bas.bg/events/sdanca19/abstracts/SDANCA19_abstract_Minkov.pdf)

Изнесен е поканен доклад: **Н. Минков** “Decay rates and magnetic moment in the  $^{229\text{m}}\text{Th}$  “clock” isomer”, Боголюбовска лаборатория по теоретична физика (БЛТФ), 10 юни 2019 г., БЛТФ-Дубна, Русия, <http://theor.jinr.ru/perl/cgi/seminar.pl?2019> .

Семинар, **J. Van der Jeugt**, Partition functions for paraboson and parafermion systems, Centre de recherches mathématiques, Montréal, June 2, 2020, <http://www.crm.math.ca/cal/en/jour20200602.html>

Научно посещение на **Н. Минков** в Макс Планк института (МПИ) по ядрена физика в Хейделберг (Германия), 1-31-ви юли 2019 г. Осъществена е съвместна работа с колеги от МПИ върху актуалната тема за свойствата на изомерното състояние на ядрото  $^{229}\text{Th}$ .

Научно посещение на **Н. Стоилова** в Университета в Гент, Белгия, 12-27 август, 2019 г. Осъществена е съвместна работа върху построяването на клас от представяния на супералгебрата на Ли  $V(\infty|\infty)$ .

Участие на **Н. Минков** в Международния семинар „Форми и динамика на атомните ядра: съвременни аспекти“ (SDANCA-21), София, 16-18 сеп. 2021г. <http://ntl.inrne.bas.bg/events/sdanca21/index.html>

Участие на **Н. Минков** в 39-тия международен семинар по теория на ядрото (IWNT39-2022), Боровец, 3-9 юли 2022г. <http://ntl.inrne.bas.bg/workshop/2022/programme.html>

### П.3. Очаквани резултати.

Публикации в международни списания с импакт фактор и в материали на конференции.

## II.4. Постигнати резултати.

### II.4.1 Описание на постигнатите научни резултати

Дейност 2.1: Построяването в явен вид на пространствата на Фок за краен брой парабозони и парафермиони, както и за смесени системи от краен брой парачастици беше направено едва 60 години след въвеждане на парастатистиката. Реалният интерес е към такива квантови системи с безброй степени на свобода, именно състоящи се от безброй много парабозона и безброй много парафермиона. Построяването на тяхното Фоково пространство с относителни парафермионни релации между парабозоните и парафермионите за ред на статистиката  $p$ , където  $p$  е параметър, приемащ цели стойности, е направено в работа [РП2.1]. Въведен е подходящ базис и трансформацията му под действие на операторите на раждане и унищожение на парабозоните и парафермионите. Резултатите са важни от гледна точка на факта, че парабозоните и парафермионите за ред на статистиката  $p = 2$  и  $p = 3$  се разглеждат като кандидати за частици на тъмната енергия и материя. Освен това бяха предложени квантови симулации на парабозони и парафермиони с цел потенциално използване на парачастиците в квантови информационни системи.

За да се изяснят тези възможни приложения на такива обобщени квантови системи е нужно те да се изследват от гледна точка на статистическата термодинамика. За тази цел е необходимо да се намери подходяща форма на голямата статистическа сума за системи от парабозони и парафермиони. Това е направено в работа [РП2.2] за всеки ред на статистиката  $p$ . Използвайки така намерените големи статистически суми сме изследвали някои термодинамични свойства на парабозонната и на парафермионната статистика, като средния брой частици на орбитала и общия брой частици в системата. Два специални случая (идентични енергетични нива и енергетични нива на еднакви разстояния едно от друго) са разгледани в детайли, като за тях основните термодинамични свойства са илюстрирани чрез графиките на някои функции на разпределение. Намерена е важна връзка между големите статистически суми за парабозони и парафермиони при идентични енергетични нива. Специално внимание е отделено на важните за приложения случаи  $p = 2$  и  $p = 3$ .

Дейност 2.2: Фоковите пространства за система от безброй парафермиона и безброй парабозона с относителни парабозонни съотношения са построени като неприводими представления на  $Z_2 \times Z_2$ -градуираната супералгебра на Ли от безкраен ранг  $psl(\infty|\infty)$  в работа [РП2.3]. Въведен е подходящ базис и е намерена трансформацията му под действие на операторите на раждане и унищожение на парабозоните и парафермионите. Резултатите са отново изключително важни за ред на статистиката  $p = 2$  и  $p = 3$ .

Зад 2-та типа смесени системи от парабозони и парафермиони, съответстващи на 2-те нетривиални от физична гледна точка възможности за относителните комутационни съотношения между парафермиони и парабозони, а именно „относителен парафермионен тип“ и „относителен парабозонен тип“, стоят твърде различни алгебрични структури. Това са супералгебрите на Ли  $osp(2m + 1|2n)$ ,  $osp(\infty|\infty)$ , и  $Z_2 \times Z_2$ -градуираните алгебри

$psu(2m + 1|2n)$ ,  $psu(\infty|\infty)$ . В работа [ПП2.4] сме показали, че тези две възможности са свързани с така наречената трансформация на Клайн (Klein).

Дейност 2.3: В работа [ПП2.5] формализмът и резултатите от приложението на теоретичния подход със „заместваща“ (проху)  $SU(3)$  симетрия са съпоставени и сравнени с тези от известния преди това т.нар. модел с псевдо  $SU(3)$  симетрия. Докато в първия симетрията се реализира посредством изобразяване на ядрени едночастични орбитали смъкнати в по-нисък слой (defectors) върху смъкнати от по-горен слой орбитали с противоположна четност (intruders), то във втория подход  $SU(3)$  симетрията се реализира посредством изобразяване на орбиталните моменти на нивата от слоя в тези от по-ниския слой. Показано е, че в резултат на различните трансформации в двата подхода се получават различни структури на  $SU(3)$  слоя, различен брой валентни нуклони, а от там и различни неприводими представяния на групата  $SU(3)$ , които определят деформацията и динамичните свойства на ядрата в широки области на ядрената карта. Очертани са предимствата на прокси  $SU(3)$  подхода, при който трансформацията запазва пълния ъглов момент, както и възможността за отчитане на нарушаването на симетрията частица-дупка в слоя при описанието на прехода от издължени (prolate) към сплеснати (oblate) форми на ядрата.

В работа [ПП2.6] подходът със „заместваща“ (проху)  $SU(3)$  симетрия е приложен за предсказване на структурата на основните и гама енергетични ивици в редица тежки деформирани ядра от редкоземната област. Осъществено е систематично изследване на енергетичното отместване на нивата в гама ивиците спрямо тези в основните ивици на ядрата. Показано е, че в областта на добре деформирани ядра то намалява с нарастване на ъгловия момент за разлика от областите на гама-меките, триаксиални и вибрационни ядра, където се наблюдава нарастване. Това поведение е обяснено посредством колективни взаимодействия описвани с три- и четири-частични оператори от обвиващата алгебра на  $SU(3)$ , които са отговорни за разцепването на  $SU(3)$ -мултиплетите, към които принадлежат основната и гама ивиците на ядрата. Посредством тези взаимодействия е възпроизведен и четно-нечетния „стагеринг“ ефект в структурата на гама-ивиците.

В работа [ПП2.7] са изведени трансформационни изрази, свързващи  $SU(3)$  базиса на Елиот (зададен в декартови координати) с този на сферичния слоест модел (хармоничен осцилатор в сферични координати) за случая на  $p$  и  $sd$  слоевете. Трансформацията позволява състоянията в слоестия модел да бъдат свързани с неприводимите представяния  $(\lambda, \mu)$  на групата  $SU(3)$ , а от там и с деформационните параметри  $\beta$  и  $\gamma$ . По този начин резултатът позволява дефинирането на деформационни моди в ядра близки до сферичните и оценката им в термини на неприводимите представяния на  $SU(3)$ .

В работа [ПП2.8] концепцията развита в рамките на прокси  $SU(3)$  подхода по отношение на избора на неприводимите представяния  $(\lambda, \mu)$  за определяне на деформацията е приложена по отношение на псевдо  $SU(3)$  схемата. Показано е, че налагайки условието избраното неприводимо представяне да бъде максимално симетрично при отчитане на ефектите на късодействащата част на ядрената вълнова функция за описание на деформациите при ядра от втората половина на слоя трябва да бъде взето представянето с т.нар максимално тегло вместо представянето с максимална собствена стойност на оператора на Казимир от втора

степен за SU(3). Показано е, че налагането на това условие позволява да бъде възпроизведен прехода от издължени към сплеснати ядрени форми под горната граница на редкоземната област при ядрата с брой неутрони между 114 и 116 в областта на изотопите W, Os и Pt в съответствие с наличните експериментални данни за ядрените деформации. По този начин е получено и групово-теоретично обяснение за доминацията в ядрената карта на издължените форми спрямо сплеснатите – въпрос, който от много години не намира еднозначно обяснение в дълбоко микроскопичните модели на ядрото.

В работа [РП2.9] в рамките на модела „квадрупол-октуполна сърцевина плюс частица“ са изследвани магнитните свойства на ядрото  $^{229}\text{Th}$  в условията на нарушена огледална симетрия в следствие на налична октуполна деформация. Въз основа на моделна параметризация получена в предходна работа посредством описание на енергетичния квазидублетен спектър и наличните данни за електромагнитните преходи в ядрото е направено предсказание за магнитния диполен момент в 8 eV изомерното състояние на ядрото  $^{229}\text{Th}$ . Получената стойност от  $-0.35\mu_N$  (единици ядрен магнетон) се оказва в много добро съгласие с едновременно получената експериментална стойност  $-0.37(6)\mu_N$ . Резултатът дава възможност за следващи по-прецизни оценки на електромагнитните свойства на изомера с цел приложението му за установяване на нов честотен стандарт за измерване на времето наречен „ядрен часовник“.

В серията от работи [РП2.10]-[РП2.12] с помощта на колективния квадрупол-октуполен модел разработен от автора са изследвани ивиците с алтернативно-меняща се четност в неодимевите изотопи  $^{130-136}\text{Nd}$ . Във всичките ядра е наблюдавано и описано от модела доближаване на нивата с противоположна четност при нарастването на ъгловия момент. В четност, в ядрото  $^{136}\text{Nd}$  е установено сливане на двете ивици с противоположна четност около ъгловия момент  $I=7-8$  в една обща енергетична ивица. По-детайлният  $\Delta I=1$  стагеринг анализ на спектъра показва и наличието на обръщане на отместването по четност при по-високите ъглови моменти. По този начин структурата на спектъра в това ядро дава индикация за сравнително добре изразена октуполна (рефлекторно-асиметрична) форма. В ядрото  $^{134}\text{Nd}$  подобен макар и малко по-слабо изразен ефект се наблюдава при доста по-високи ъглови моменти около  $I = 22-25$ . При останалите две ядра,  $^{130,132}\text{Nd}$ , такъв ефект на сливане не се наблюдава, като моделът предполага проявата в различна степен на меки квадрупол-октуполни деформации. Анализът на моделните описания дава възможност да се направи извода, че в ядрото  $^{136}\text{Nd}$  е възможно наличието на рефлекторно-асиметрична форма, ядрото  $^{134}\text{Nd}$  има преходно поведение в посока на меките квадрупол-октуполни форми, докато в ядрата  $^{130,132}\text{Nd}$  единствено последните форми биха могли да играят роля в колективната динамика. Получените резултати задават направление за бъдещи теоретични и експериментални изследвания в тази област на ядрената карта, където може да се очаква проявата на интересни нови ефекти на нарушена огледална симетрия.

Дейност 2.4: В работа [РП2.13] нивата на ротационно-вибрационните ивици с алтернативно променяща се четност в ядрата от областта на лантанидите  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{154}\text{Sm}$ ,  $^{154,160}\text{Gd}$ ,  $^{162,164}\text{Er}$  и актинидите  $^{228,232}\text{Th}$ ,  $^{230,236,238}\text{U}$ ,  $^{240}\text{Pu}$  са изследвани в рамките на неадиабатен колективен модел на четно-четни ядра с квадруполни и октуполни (рефлекторно-асиметрични)

деформации. Теоретичните спектри са получени чрез използването на потенциали на Гаус и хармоничен осцилатор (ХО) в радиалната част на уравнението на Шрьодингер в полярни координати. Отчетено е изменението на повърхностната деформация на ядрото с колективната енергия на възбуждане. Изследван е  $\Delta I = 1$  стагетинг ефекта в структура на ивиците с алтернативно променяща се четност. Теоретично получените енергетични ивици и стагетинг диаграми са в добро съответствие с експерименталните данни и показват наличието на мека квадрупол-октуполна деформация, проявяваща се в колективното движение на тези ядра.

В работа [РП2.14] в рамките на разработения от Н. Минков колективен квадрупол-октупол-лен ротационен модел (QORM) е изследвана структурата на ивицата с алтернативно меняща се четност в ядрото  $^{136}\text{Ba}$ , за което в същата работа експериментален колектив докладва нови данни. Моделният анализ на структура на енергетичните ивици и на ефекта на отместване на нивата по четност в тази ивица показва наличието на октуполна колективност и възможно твърда квадрупол-октуполна деформация далеч от областите на двойно магичните октуполни числа  $Z = 56$  и  $N = 88$ . Полученият резултат дава мотивация за бъдещи микроскопични изследвания за изясняване на произхода и свойствата на рефлукторната асиметрия в тази област на бариевите изотопи.

В работа [РП2.15] са изведени унитарни трансформации, които последователно свързват аксиално деформиран базис в модела с прокси-SU(3) симетрия с базиса в модела на Елиот в декартови координати и от там с базиса на сферичния слоест модел. Трансформацията към декартови координати задава реализация на прокси-SU(3) приближението (замяната на интродър-орбиталите с отместените надолу орбитали) под формата на отместване на  $z$ -координатата, запазващо  $x$ - $y$  равнината инвариантна. От друга страна изобразяването на декартовите координати на базиса на Елиот върху базиса на сферичния слоест модел задава прокси-SU(3) приближението във сферични координати. При това се оказва, че двойките от интродър-орбиталите и отместените надолу орбитали съответстват на т.нар. двойки орбитали на de Shalit-Goldhaber, първоначално дефинирани по отношение на неутрон-протонното взаимодействие, с което се обяснява наличието на ядрени области с подтиснат  $\beta$ -разпад. Съответните конфигурации се характеризират със засилено припокриване на пространствените части на вълновите функции, поради което се оказват съществено енергетично изгодни. Този резултат дава солидна микроскопична обосновка на прокси-SU(3) приближението и проправя пътя му за широки бъдещи приложения.

В работа [РП2.16] е осъществено систематично изследване на основните и  $\gamma$ -ротационни ивици в областите на добре деформираните, триаксиалните и гама-меки ядра [2]. Измененията във взаимното разположение на двете ивици е сравнено с предсказанията на модела на Бор с различни потенциали и приближения, с модела на взаимодействащите бозони и схемата с нарушена SU(3) симетрия. Очертани са областите на приложимост и границите между отделните теоретични подходи.

В работа [РП2.17] е разработен неадиабатичен колективен модел за четно-четни ядра с ефективни триаксиални квадруполни и октуполни деформации. Моделът описва трииз-

мерни квадрупол-октуполни ротации, комбинирани с аксиални квадрупол-октуполни вибрации. Тензорът на инерционния момент зависи от ъгловата част на полярните координати в квадруполно-октуполното пространство, чиито стойности са определени в основното състояние на ядрото. В тези рамки на модела са изследвани ивиците с алтернативноменяща се четност на ядра от областта на лантанидите  $^{154}\text{Sm}$ ,  $^{154,160}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$  и актинидите  $^{228,230,232}\text{Th}$ ,  $^{230,232,236,238}\text{U}$ ,  $^{238}\text{Pu}$ .

В работа [ПП2.18] са представени резултати от експеримент, осъществен в IFIN–HH, Румъния, за измерване на живота на възбудени състояния в неутронно богатото ядро  $^{180}\text{Hf}$  посредством техниката RDDS. Реакцията на  $^{181}\text{Ta} (^{11}\text{B}, ^{12}\text{C}) ^{180}\text{Hf}$  с протонен захват е използвана за заселване на възбудени състояния в ядрото  $^{180}\text{Hf}$ . Гама преходите, посредством които тези нива се разпадат, са открити с помощта на детекторната система ROSPHERE в конфигурация 25 HPGe. Системата е свързана с детектора за частици SORCERER и плънжерно устройство, позволяващо изследването на  $p$ - $\gamma$  и  $p$ - $\gamma$ - $\gamma$  съвпадащи събития. Избрани са шест отстояния на плънжера, което позволява построяването на кривите на затихване на наблюдаваните преходи, от които впоследствие могат да бъдат изведени времената на живот на нивата, които представляват интерес.

#### II.4.2 Списък на публикации по РП 2 с отбелязана подкрепа от договор КП-06-H28/6

[ПП2.1] **N.I. Stoilova** and J. Van der Jeugt, Representations of the Lie superalgebra  $B(\infty, \infty)$  and parastatistics Fock spaces, J. Phys. A: Math. Theor. 52 135201 (28pp) (2019) **IF: 1.996, Q2** (Scopus, Math. Phys.) <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/ab09bc>

[ПП2.2] **N.I. Stoilova** and J. Van der Jeugt, Partition functions and thermodynamic properties of paraboson and parafermion systems, Phys. Lett. A 384, Issue 21, 126421 (2020), **IF 2.278, Q2** (Scopus), <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126421>

[ПП2.3] **N.I. Stoilova** and J. Van der Jeugt, The  $Z_2 \times Z_2$ -graded Lie superalgebras  $psl(2n+1|2n)$  and  $psl(\infty|\infty)$ , and parastatistics Fock spaces, J. Phys. A: Math. Theor. 55 045201 (14pp) (2022), **IF 2.331**, Web of Science: **Q1**, <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac451d>

[ПП2.4] **N.I. Stoilova** and J. Van der Jeugt, A Klein Operator for Paraparticles, (2022) In: Dobrev, V. (eds) Lie Theory and Its Applications in Physics. LT 2021. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 396. pp 263–268, ISSN 21941009, 21941017, Springer, Singapore, **SJR: 0.2** [https://doi.org/10.1007/978-981-19-4751-3\\_20](https://doi.org/10.1007/978-981-19-4751-3_20)

[ПП2.5] D. Bonatsos, A. Martinou, I. E. Assimakis, S. Sarantopoulou, S. Peroulis and **N. Minkov**, Manifestations of SU(3) symmetry in heavy deformed nuclei, Nuclear Theory, vol. 38, Proceedings of the 38-th International Workshop on Nuclear Theory (Rila, Bulgaria 2019), ed. M. Gaidarov and N. Minkov, (Heron Press, Sofia), p. 128 (2019), [http://ntl.inrne.bas.bg/workshop/2019/contributions/p15\\_Bonatsos\\_2019.pdf](http://ntl.inrne.bas.bg/workshop/2019/contributions/p15_Bonatsos_2019.pdf)



[PII2.6] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, A. Martinou, S. K. Peroulis, S. Sarantopoulou and **N. Minkov**, Proxy-SU(3) symmetry for heavy deformed nuclei: nuclear spectra, Bulg. J. Phys. 46 (No 4), 325-336 (2019), [http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019\\_4\\_325-336.pdf](http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019_4_325-336.pdf)

[PII2.7] A. Martinou, **N. Minkov**, S. Sarantopoulou, S. Peroulis, I. E. Assimakis and D. Bonatsos, Connection between Elliott SU(3) and spherical shell model bases, Bulg. J. Phys. 46 (No 4), 337-346 (2019), [http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019\\_4\\_337-346.pdf](http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019_4_337-346.pdf)

[PII2.8] D. Bonatsos, A. Martinou, S. Sarantopoulou, I. E. Assimakis, S. Peroulis and **N. Minkov**, Parameter-free predictions for the collective deformation variables beta and gamma within the pseudo-SU(3) scheme, Eur. Phys. J. Special Topics (EPJ ST), **229** (Issues 14-15), 2367-2387 (2020), **IF 1.660, Q2** (Scopus) <https://doi.org/10.1140/epjst/e2020-000034-3>

[PII2.9] **Nikolay Minkov** and Adriana Pálffy, Theoretical Predictions for the Magnetic Dipole Moment of  $^{229}\text{mTh}$ , Phys. Rev. Lett. 122, 162502 (2019), **IF 9.227 Q1** (Scopus), <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.122.162502>

[PII2.10] **N. Minkov**, Study of pear-shape effects in the spectra of even-even nuclei, Nuclear Theory, vol. 38, Proceedings of the 38-th International Workshop on Nuclear Theory (Rila, Bulgaria 2019), ed. M. Gaidarov and N. Minkov, (Heron Press, Sofia), p. 34 (2019), [http://ntl.inrne.bas.bg/workshop/2019/contributions/p05\\_Minkov\\_2019.pdf](http://ntl.inrne.bas.bg/workshop/2019/contributions/p05_Minkov_2019.pdf)

[PII2.11] **N. Minkov**, Nuclear structure effects involving pear-shape deformation, Bulg. J. Phys. 46 (No 4), 386-394 (2019), [http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019\\_4\\_386-394.pdf](http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019_4_386-394.pdf)

[PII2.12] **N. Minkov**, Pear-shape effects in  $^{130-136}\text{Nd}$  isotopes, Acta Phys. Pol. B Suppl. **13** (No 3), 443 (2020), **SJR=0.21, Q3** (Scopus) (Proc. XXVI Nuclear Physics Workshop "Maria and Pierre Curie" - Key problems of nuclear physics, 24-29.09.2019, Kazimierz Dolny, Poland) <https://doi.org/10.5506/APhysPolBSupp.13.443>

[PII2.13] M. S. Nadirbekov, S. N. Kudirratov, F. N. Temirov and **N. Minkov**, "Vibrational-rotational spectra of even-even nuclei with quadrupole and octupole deformations", Int. J. Mod. Phys. E **29** (No. 6), 2050031 (2020). <https://doi.org/10.1142/S0218301320500317>  
**Scopus-Q3, Impact Factor: 1.036** (from the IJMPE page, 31 Dec 2020)

[PII2.14] C. M. Petrache, **N. Minkov**, T. Nakatsukasa, B. F. Lv, A. Astier, E. Dupont, K. K. Zheng, P. Greenlees, H. Badran, T. Calverley, D. M. Cox, T. Grahn, J. Hilton, R. Julin, S. Juutinen, J. Konki, J. Pakarinen, P. Papadakis, J. Partanen, P. Rahkila, P. Ruotsalainen, M. Sandzelius, J. Saren, C. Scholey, J. Sorri, S. Stolze, J. Uusitalo, B. Cederwall, A. Ertoprak, H. Liu, S. Guo, M. L. Liu, J. G. Wang, X. H. Zhou, I. Kuti, J. Timar, A. Tucholski, J. Srebrny and C. Andreoiu, "Signatures of enhanced octupole correlations at high spin in  $^{136}\text{Nd}$ ", Phys. Rev. C **102**, 014311 (2020). <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.102.014311>  
**Scopus2019-Q1, Impact Factor: 2.988** (from the PRC page, 31 Dec 2020)

[ПП2.15] A. Martinou, D. Bonatsos, **N. Minkov**, I. E. Assimakis, S. K. Peroulis, S. Sarantopoulou, J. Cseh, “Proxy-SU(3) symmetry in the shell model basis”, Eur. Phys. J. A **56**: 239 (2020). <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-020-00239-0>

Scopus2019-**Q1**, **Impact factor: 2.176** (from the EPJA page, 31 Dec 2020)

[ПП2.16] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, A. Martinou, S. Sarantopoulou, S. K. Peroulis and **N. Minkov**, “Energy differences of ground state and  $\gamma_1$ -bands as a hallmark of collective behavior”, Nucl. Phys. A **1009**, 122158 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2021.122158>

Scopus2021-**Q2**, **Impact factor (2021): 1.558**

[ПП2.17] M. S. Nadirbekov, O. A. Bozarov, S. N. Kudiratov and **N. Minkov**, “Quadrupole and Octupole deformations with effective triaxiality in even-even nuclei”, Int. J. Mod. Phys. E **31** (No. 08), 2250078 (2022). <https://doi.org/10.1142/S0218301322500781>

Scopus 2021-**Q3**, **Impact factor (2021): 0.924**

[ПП2.18] P. Vasileiou, T.J. Mertzimekis, A. Chalil, A. Zyriliou, S. Pelonis, M. Efstathiou, V. Lagaki, G. Siltzovalis, P. Koseoglou, D. Bonatsos, A. Martinou, **N. Minkov**, N. Marginean, C. Mihai, N. Florea, S. Ujeniuc, A. Turturica, C. Costache, R. Mihai, L. Stan, D. Filipescu, S. Toma, I. Gheorghe, I. Dinescu, A. Ionescu, L. Stoica, S. Calinescu, A. Oprea, A. Stoica, C. Sotty, C. Clisu, C. Nita, C. Neascu, “Experimental Investigation of the Nuclear Structure in the Neutron-Rich  $^{180}\text{Hf}$ ”, Bulg. J. Phys. **48**, 618–624 (2021). <https://www.bjp-bg.com/paper1.php?id=1496>

### III. Организираны международны мероприятия и развитие на международното сътрудничество

По време на първия етап беше организиран и проведен международният научен семинар: „Формы и динамика на атомните ядра: съвременни аспекти“ (“Shapes and Dynamics of Atomic Nuclei: Contemporary Aspects” (SDANCA-19)) (3-5 октомври 2019 г.) в Дома на учения (хотела) на БАН в София, с председател на Организационния комитет **Н. Минков**. В семинара взеха участие 47 регистрирани участници от 17 страни. Докладите бяха допълнително посетени и от около 10 колеги от ИЯИЯЕ, СУ и МУ-София. Със специалното финансиране от страна на договора, по точка „посещения на чуждестранни учени“ предвидена във финансовия план, беше осигурено участието на следните чуждестранни учени: проф. Денис Бонацос, проф. Георгиос Лалазисис, проф. Хараламбос Мустакидис, проф. Теодорос Мерцимекис, д-р Андриана Мартиноу всички от Гърция и проф. Филип Уолкър от Великобритания. Като резултат в следните работи:

1. A. Martinou, “Shell Merging in SU(3)”, Nuclear Theory, vol. 38, Proceedings of the 38-th International Workshop on Nuclear Theory (Rila, Bulgaria 2019), ed. M. Gaidarov and N. Minkov, (Heron Press, Sofia), p. 31 (2019),

[http://ntl.inrne.bas.bg/workshop/2019/contributions/p04\\_Martinou\\_2019.pdf](http://ntl.inrne.bas.bg/workshop/2019/contributions/p04_Martinou_2019.pdf)

2. G. A. Lalazissis, K. E. Karakatsanis, V. Prassa and P. Ring, “K-Levels in Axially Deformed Nuclei with Relativistic Hartree-Bogoliubov Theory”, Bulg. J. Phys. 46 (No 4), 354–365 (2019), [http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019\\_4\\_354-365.pdf](http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019_4_354-365.pdf)

3. T. J. Mertzimekis, A. Khaliel, D. Papaioannou, G. Zagoraios, A. Zyriliou, “Lifetimes and Moments Measurements to Investigate the Structure of Midheavy Nuclei”, Bulg. J. Phys. 46 (No 4), 378–385 (2019), [http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019\\_4\\_378-385.pdf](http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019_4_378-385.pdf)

4. P. S. Koliogiannis, Ch. C. Moustakidis, “Effects on the Equation of State through the Uniform Rotation of Neutron Stars”, Bulg. J. Phys. 46 (No 4), 303–312 (2019), [http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019\\_4\\_303-312.pdf](http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019_4_303-312.pdf)

са изказани благодарности за финансовата подкрепа на договора. Със средства от договора статиите по изнесените доклади бяха публикувани в брой 46, книжка 4 на Bulg. J. Phys. след преминаване на пълна процедура по анонимно рецензиране.

<http://www.bjp-bg.com/papers.php?year=2019&vol=46&issue=4> . Информация за семинара е дадена на неговата страница <http://ntl.inrne.bas.bg/events/sdanca19/> .

По време на втория етап беше организиран и проведен международният научен семинар: „Форми и динамика на атомните ядра: съвременни аспекти“ (“Shapes and Dynamics of Atomic Nuclei: Contemporary Aspects” (SDANCA-21)) (16-18 септември 2021 г.) в София Тех парк, с председател на Организационния комитет **Н. Минков**. Отново със специалното финансиране от страна на договора, по точка „посещения на чуждестранни учени“ предвидена във финансовия план, беше осигурено участието на следните чуждестранни учени: Dr. Tomas Dytrych от Института за ядрена физика към Чешката академия на науките, Dr. Pavlos Koseoglou от Техническият университет в Дармщат, Polytimos Vasileiou от Националния университет в Атина, Alkiviadis Kanakis-Pegios от Физическия факултет на Университета „Аристотел“ в Солун. Като резултат в следните работи:

[5.] A. Kanakis-Pegios, P.S. Koliogiannis, Ch.C. Moustakidis, “Constraints on the Equation of State of Dense Nuclear Matter from the Tidal Deformability of Neutron Stars”, Bulg. J. Phys. **48**, 577–586 (2021). <https://www.bjp-bg.com/paper1.php?id=1492>

[6.] T. Dytrych, K. D. Launey, J. P. Draayer, D. Langr, “Ab initio View of Emergent Symplectic Symmetry and Its Crucial Role in Nuclear Dynamics”, Bulg. J. Phys. **49**, 37–46 (2022). <https://www.bjp-bg.com/paper1.php?id=1510>

[7.] P. Koseoglou, V. Werner, N. Pietralla, “N = 90 Shape Phase Transition: Increasing Axial Asymmetry Towards  $^{148}\text{Ce}$ ”, Bulg. J. Phys. **49**, 89–96 (2022). <https://www.bjp-bg.com/paper1.php?id=1515>

са изказани благодарности за финансовата подкрепа на договора.

Информация за семинара е дадена на неговата страница

<http://ntl.inrne.bas.bg/events/sdanca21/index.html>

По отношение на развитие на международното сътрудничество добавяме и имената на:

Prof. Phillip Isaac, School of Mathematics and Physics, The University of Queensland, Australia

Prof. Malte Henkel, Laboratoire de Physique et Chimie Théoriques, Université de Lorraine Nancy, Vandoeuvre l'ès Nancy Cedex, France

Prof. Michal Kuczynskia, Laboratoire de Physique et Chimie Théoriques, Université de Lorraine Nancy, Vandoeuvre l'ès Nancy Cedex, France

Prof. Adriana Pálffy, Max-Planck-Institut für Kernphysik, Heidelberg, Germany

Dr. Maria Andriani Martinou, NCSR Demokritos, Athens, Greece

От 2-ри до 6-ти април 2023г. беше осъществено посещение на д-р Мария Андриани (Андриана) Мартиноу от Изследователски център “Демокрит”, Атина, в ИЯИЯЕ. Бяха обсъдени въпроси от общ интерес в приложението на алгебричните методи в теорията на атомните ядра и по-конкретно възможностите за изчисляване на електромагнитни преходи в деформирани ядра в рамките на модела с прокси-SU(3) симетрия. Д-р Мартиноу изнесе семинар в ИЯИЯЕ на тема „Прокси-SU(3) симетрия в атомните ядра”. Бяха очертани планове за бъдеща съвместна работа по темата.

<https://www.inrne.bas.bg/index.php/seminars/907-news-seminar-04-04-2023>

#### IV. Други

[8] **N. Minkov**, PREFACE to the Proceedings of the International Workshop “Shapes and Dynamics of Atomic Nuclei: Contemporary Aspects” (SDANCA-19), 3-5 October 2019, Sofia, Bulgaria”, Bulg. J. Phys. 46 (No 4), 343-245 (2019),

[http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019\\_4\\_243-246.pdf](http://www.bjp-bg.com/papers/bjp2019_4_243-246.pdf)

[9] **Н. Стоилова**, Мъри Гел-Ман – “Човекът с петте мозъка”, Светът на физиката, том XLIII, кн. 1, 2020 г, стр. 76, <http://wop.phys.uni-sofia.bg/> - предназначена за широката физична аудитория, в частност преподаватели в училищата, студенти по природни науки, ученици от класове с природо-математически профил.

[10] **N.I. Stoilova**, Tchavdar Dimitrov Palev - In Memoriam, SciPost Physics Proceedings, Proceedings issue: 34th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, accepted. [https://scipost.org/submission/scipost\\_202211\\_00012v1/](https://scipost.org/submission/scipost_202211_00012v1/)

Резултатите, постигнати през първия и втория етап на проекта определяме като натрупване и напредък на фундаментални научни знания с принос към дългосрочната програма на международната общност на изследователите в областта на математическата физика, физиката на елементарните частици, ядрената физика и физиката на високите енергии. Знанията и опитът, придобити от членовете на екипа, несъмнено повишиха квалификацията и конкурентноспособността ни и следователно тези на ИЯИЯЕ.

Брой докторанти в проекта	0
Брой млади учени	1
Брой научни публикации	28
От тях с импакт фактор	16
От тях с импакт ранг	5

Научна степен, акад. длъжност	Име	Месторабота	Млад учен	Подпис
1. проф. дфн	Николай Минков Петров	ИЯИЯЕ-БАН		
2. проф.	Йорис Ван дер Йо- ихт	Университета в Гент, Белгия		
3. проф. дфн	Недялка Илиева Стоилова	ИЯИЯЕ-БАН		
4. гл. ас., д-р	Стоимен Тодоров Стоименов	ИЯИЯЕ-БАН		
5. д-р	Рои Осте	Университета в Гент, Белгия	МУ ПД	